Rapport d'avancement

Position du problème :

Une mine est un bâtiment qui a un coût, et qui une fois construit produit des ressources. On a à notre disposition un ensemble fini de mines, de caractéristiques (coût et production) quelconques. Le but du problème est de trouver l'ordre de construction de ces mines, qui minimise le temps d'attente total.

Dans un premier temps, on considère le problème suivant :

- Les mines n'ont pas de temps de construction, c'est-à-dire qu'une fois payée, une mine produit directement. Le temps total de construction résulte donc seulement du temps d'attente pour l'obtention des ressources nécessaires.
- On ne considère qu'une seule ressource.

Remarques préliminaires :

On commence avec une production initiale donnée.
Il paraît intuitif, et c'est ce qu'on constate, que les mines de forte production et de faible coût sont construites en premier, et qu'à l'inverse les mines de faible production et de coût important sont en dernier.
Le tri par rendement décroissant des mines (le rendement d'une mine étant $\frac{p}{c}$) ne donne pas en général la solution optimale.

Premières notations :

Une mine M est un couple (c, p), où c est son coût et p est sa production.

E est l'ensemble des mines à construire initialement, avec $n = card(E)$
On note $t_p(M_i) = \dfrac{c_i}{p}$ le temps d'attente pour une mine.
Un chemin $L = [M_1, \ldots, M_k]$ est une liste de mines.
On note $C(L) = \sum_{i=1}^{k} c_i$ et $P(L) = \sum_{i=1}^{k} p_i$ les coûts et productions totaux respectifs de L.
On note $T_p(L) = \sum_{i=1}^{k} \dfrac{c_i}{p + \sum_{j=1}^{i-1} p_j}$ le temps de construction total de L à p.
La production initiale est notée p_0.
On note $\mathcal{L}$ l'ensemble des chemins possibles de longueur n, au nombre de $n!$.
Le but du problème est donc de trouver le minimum de T_{p_0} sur $\mathcal{L}$.

Liste des propriétés et des algorithmes trouvés :

Algorithme naïf

Il consiste à calculer le temps de construction de tous les chemins possibles, il a donc une complexité en $n!$.

Dominance

On peut prouver que si une mine M_1 coûte moins cher et produit plus qu'une mine M_2, alors quels que soient les autre mines et la production initiale, dans la (ou les) solution optimale, M_1 est nécessairement avant M_2. La démonstration est en annexe.

Optimalité 2 à 2

Soit E un ensemble de n mines. Soit $L = [M_1, \ldots, M_n]$ le chemin idéal de E à p_0.

Soit L' un sous-chemin de L, $L' = [M_i, \ldots, M_j]$, $(i, j) \in [\![1; n]\!]^2$, $i \leq j$

Alors L' est le chemin optimal de l'ensemble $\{M_i, \ldots, M_j\}$ pour la production initiale $p_0 + \ldots + p_{i-1}$

En particulier, tous les $[M_k, M_{k+1}]$ sont des chemins idéaux.

Or, $[A, B]$ est idéale à $p \Leftrightarrow T_p([A, B]) \leq T_p([B, A]) \Leftrightarrow c_A(1 + \frac{p}{p_A}) \leq c_B(1 + \frac{p}{p_B})$

On a donc une formule simple pour savoir si un ensemble de 2 mines est idéal. Ainsi, on peut construire tous les chemins optimaux 2 à 2 de taille n.

On note $p^*(A, B) = p^*(B, A) = \dfrac{c_A - c_B}{\frac{c_B}{p_B} - \frac{c_A}{p_A}}$

Si A est plus rentable que B, alors :

- Si $p \leq p^*(A, B)$, alors $[B, A]$ est idéale à p

- Si $p \geq p^*(A, B)$, alors $[A, B]$ est idéale à p

Soit E un ensemble de mines. On note $p^*_{max}(E)$ le maximum de $p^*(A, B)$, A et B appartenant à E.

On montre facilement que si $p \geq p^*_{max}(E)$, alors le chemin optimal de E pour une production initiale p, correspond au tri des mines par rendement décroissant, et en cas d'égalité, par coût croissant.

NDO (Naïf avec dominances et optimalité 2 à 2)

Cet algorithme consiste à intégrer les propriétés de dominance et d'optimalité 2 à 2 dans l'algorithme naïf. Il n'explore donc que les chemins optimaux 2 à 2. La dominance permet de ne pas explorer certains ensembles de mines. L'utilisation de l'optimalité 3 à 3, bien qu'elle réduit encore plus le nombre de chemins explorés, donne un algorithme plus lent, puisque le tri d'un ensemble de 3 mines est trop long (on ne dispose pas de "formule").

C'est le meilleur algorithme démontré exact qu'on ait pour l'instant.

Dominance entre chemins

Cette propriété n'est pas démontrée, et on n'a bien entendu pas trouvé de contre-exemple.

Soit E un ensemble de mines, et p_0 la production initiale. Soit C_1 et C_2 2 chemins de mines de E, de tailles quelconques.

$$\text{Si} \begin{cases} C(C_1) \geq C(C_2) \\ \\ P(C_1) \geq P(C_2) \\ \\ T_{p_0}(C_1) \leq T_{p_0}(C_2) \end{cases} \quad \text{alors le chemin optimal de } E \text{ ne commence pas par } C_2.$$

On peut utiliser cette propriété dans un algorithme de type Dijkstra-like, qui est 2 fois plus performant que le NDO.

Utilisation du p^*_{max}

On a évoqué le fait que si $p_0 \geq p^*_{max}(E)$, alors le chemin optimal est le tri par rendement décroissant. Le problème est que c'est une propriété lourde à tester, puisqu'il faut parcourir tous les couples restants, et aussi peu fréquente, la valeur de $p^*_{max}(E)$ pouvant être bien plus grande que la somme des productions de toutes les mines de E.

La propriété suivante est bien plus utile, mais elle n'a pas été démontrée, et on n'a pas trouvé de contre-exemple :

Soit E un ensemble de mines, et p_0 la production initiale. Soit K une mine n'appartenant pas à E. Soit L le chemin optimal de E à p_0, et P la première mine de L.

Soit D l'ensemble des mines dominantes de E, c'est-à-dire l'ensemble des mines de E qui ne sont dominées par aucune autre mine de E.
Soit D' l'ensemble des mines M de D telles que $[K, M]$ est idéale à $p_0 - p_K$.

Dans le cas où $P \in D'$:

Si $p_0 \geq p^*_{max}(D')$, alors P est la mine de rendement maximal de D'.

Cette propriété a été démontrée sur D (bientôt en annexe) :

Si $p_0 \geq p^*_{max}(D)$, alors P est la mine de rendement maximal de D.