Position du problème :

On souhaite étudier l'existence d'une relation d'ordre partielle sur les listes de mines.

On veut que pour certaines mines, la connaissance seule de leurs caractéristiques (coût et production) suffise à déterminer laquelle est toujours avant l'autre, quel que soit le contexte (les autres mines et la production initiale) dans lequel on les place.

Soit la liste $L = (M_1, \dots, M_i, \dots, M_j, \dots, M_n)_p$

La permutation de M_i et M_j dans L ne modifie pas le temps d'attente pour les mines $M_1, \dots, M_{i-1}$ ni pour les mines $M_{j+1}, \dots, M_n$, puisque la production générée par la liste $L' = (M_i, \dots, M_j)$ ne varie pas. Aussi, il convient de n'étudier que la liste L'.

On note $M_i = (c_i, p_i)$
Soit $p \in \mathbb{R}_+$
Soient $L_{a,b} = (M_a, M_1, \dots, M_n, M_b)_p$ et $L_{b,a} = (M_b, M_1, \dots, M_n, M_a)_p$
On note $T(L)$ le temps nécessaire à la construction de L.

$$M_a \textit{ domine toujours } M_b \quad \Leftrightarrow \quad \forall p \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}, \forall i \in [\![1;n]\!], \forall M_i \in \mathbb{R}_+^2, T(L_{a,b}) \leq T(L_{b,a}) \qquad (1)$$

Elimination des c_i :

$$T(L_{a,b}) = \frac{c_a}{p} + \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{p + p_a + \sum_{j=1}^{i-1} p_j} + \frac{c_b}{p + p_a + \sum_{j=1}^{n} p_j}$$

Donc (1) $\quad \Leftrightarrow \quad \forall p \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}, \forall i \in [\![1;n]\!], \forall M_i \in \mathbb{R}_+^2,$

$$\frac{c_a}{p} + \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{p + p_a + \sum_{j=1}^{i-1} p_j} + \frac{c_b}{p + p_a + \sum_{j=1}^{n} p_j} \qquad \leq \qquad \frac{c_b}{p} + \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{p + p_b + \sum_{j=1}^{i-1} p_j} + \frac{c_a}{p + p_b + \sum_{j=1}^{n} p_j}$$

On remarque que si $\forall i \in [\![1;n]\!], c_i = 0,$ alors :

$$\forall p \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}, \forall i \in [\![1;n]\!], \forall p_i \in \mathbb{R}_+, \quad \frac{c_a}{p} + \frac{c_b}{p + p_a + \sum_{j=1}^{n} p_j} \qquad \leq \qquad \frac{c_b}{p} + \frac{c_a}{p + p_b + \sum_{j=1}^{n} p_j} \qquad (2)$$

De plus, soit $i \in [\![1;n]\!]$

Si on fixe toutes les variables sauf c_i, qu'on divise l'inégalité par c_i, et qu'on fait tendre c_i vers $+\infty$, on a :

$$\frac{1}{p + p_a + \sum_{j=1}^{i-1} p_j} \quad \leq \quad \frac{1}{p + p_b + \sum_{j=1}^{i-1} p_j} \qquad \text{ce qui équivaut à} \qquad p_a \geq p_b$$

La réciproque étant triviale, on a (1) $\Leftrightarrow \Big((2)$ et $p_a \geq p_b\Big)$

On a donc réussi ici à supprimer toutes les variables c_i.

Notons $p^* = \sum_{j=1}^{n} p_j$

On a M_a *domine toujours* M_b $\quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} p_a \geq p_b \\ \\ \text{et} \\ \\ \forall p \in \mathbb{R}_+^*, \forall p^* \in \mathbb{R}_+, \quad \dfrac{c_a}{p} + \dfrac{c_b}{p+p_a+p^*} \quad \leq \quad \dfrac{c_b}{p} + \dfrac{c_a}{p+p_b+p^*} \qquad (2) \end{cases}$

Elimination de p :

On multiplie (2) par $p(p+p_a+p^*)(p+p_b+p^*)$, ce qui donne après simplification :

$\forall p \in \mathbb{R}_+^*, \forall p^* \in \mathbb{R}_+, \quad (c_b(p^*+p_a) - c_a(p^*+p_b))p + (c_b - c_a)(p^*+p_a)(p^*+p_b) \geq 0$

Cette relation devant être vérifiée $\forall p \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$(1) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} p_a \geq p_b \\ \\ c_a \leq c_b \qquad (2a) \\ \\ \forall p^* \in \mathbb{R}_+, c_b(p^*+p_a) - c_a(p^*+p_b) \geq 0 \qquad (2b) \end{cases}$$

$(2a)$ est obtenu en prenant $p = 0$
$(2b)$ est obtenu en divisant l'inégalité par p, et en faisant $p \to +\infty$

Elimination de p^* :

On a $(2b) \quad \Leftrightarrow \quad \forall p^* \in \mathbb{R}_+, \quad p^* \geq \dfrac{c_a p_b - c_b p_a}{c_b - c_a}$

Or $c_a \leq c_b$, donc $(b) \quad \Leftrightarrow \quad c_a p_b - c_b p_a \leq 0$ $\qquad$ ce qui est vrai, puisque $p_a \geq p_b$ et $c_a \leq c_b$

Donc finalement, M_a *domine toujours* M_b $\quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} p_a \geq p_b \\ c_a \leq c_b \end{cases}$

Dominance selon le contexte :

On a démontré précédemment l'équivalence de la relation *domine toujours* : une production supérieure et un coût inférieur. L'avantage de cette relation est qu'elle est hors contexte : on n'a pas besoin de connaître les autres mines qu'on veut ordonner, ni la production initiale, pour savoir si A est toujours avant B. Mais en réalité, on n'est jamais hors contexte, on connaît la liste L des mines qu'on veut trier, la production initiale p_0, et on souhaite trouver les relations de dominance entre les différentes mines.

On dit que M_a *domine* M_b pour L, p_0 $\quad$ si et seulement si $\quad$ M_a est avant M_b dans la liste idéale de L, à p_0.

On a nécessairement M_a *domine toujours* $M_b \Rightarrow M_a$ *domine* M_b pour L, p_0