Position du problème :

On souhaite étudier l'existence d'une relation d'ordre partielle sur les listes de mines. Pour être plus précis, on veut que pour certaines mines, la connaissance seule de leurs caractéristiques (coût et production) suffise à déterminer laquelle est toujours avant l'autre, quelle que soit leur position dans la liste, et quelles que soient les autres mines.

Soit la liste $L = (M_1, \ldots, M_i, \ldots, M_j, \ldots, M_n)_p$

La permutation de M_i et M_j dans L ne modifie pas le temps d'attente pour les mines $M_1, \ldots, M_{i-1}$ ni pour les mines $M_{j+1}, \ldots, M_n$, puisque la production générée par la liste $L' = (M_i, \ldots, M_j)$ ne varie pas. Aussi, il convient de n'étudier que la liste L'.

On note $M_i = (c_i, p_i)$
Soit $p \in \mathbb{R}_+$
Soient $L_{a,b} = (M_a, M_1, \ldots, M_n, M_b)_p$ et $L_{b,a} = (M_b, M_1, \ldots, M_n, M_a)_p$
On note $T(L)$ le temps nécessaire à la construction de L.

$$M_a \textit{ domine } M_b \quad \Leftrightarrow \quad \forall p \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}, \forall i \in [\![1; n]\!], \forall M_i \in \mathbb{R}_+^2, T(L_{a,b}) \leq T(L_{b,a}) \qquad (1)$$

Elimination des c_i :

$$T(L_{a,b}) = \frac{c_a}{p} + \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{p + p_a + \sum_{j=1}^{i-1} p_j} + \frac{c_b}{p + p_a + \sum_{j=1}^{n} p_j}$$

Donc (1) $\quad \Leftrightarrow \quad \forall p \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}, \forall i \in [\![1; n]\!], \forall M_i \in \mathbb{R}_+^2,$

$$\frac{c_a}{p} + \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{p + p_a + \sum_{j=1}^{i-1} p_j} + \frac{c_b}{p + p_a + \sum_{j=1}^{n} p_j} \qquad \leq \qquad \frac{c_b}{p} + \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{p + p_b + \sum_{j=1}^{i-1} p_j} + \frac{c_a}{p + p_b + \sum_{j=1}^{n} p_j}$$

On remarque que si $\forall i \in [\![1; n]\!], c_i = 0,$ alors :

$$\forall p \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}, \forall i \in [\![1; n]\!], \forall p_i \in \mathbb{R}_+, \quad \frac{c_a}{p} + \frac{c_b}{p + p_a + \sum_{j=1}^{n} p_j} \qquad \leq \qquad \frac{c_b}{p} + \frac{c_a}{p + p_b + \sum_{j=1}^{n} p_j} \qquad (2)$$

De plus, soit $i \in [\![1; n]\!]$

Si on fixe toutes les variables sauf c_i, et qu'on fait tendre c_i vers $+\infty$, alors nécessairement pour que l'inégalité soit respectée, on a :

$$\frac{1}{p + p_a + \sum_{j=1}^{i-1} p_j} \quad \leq \quad \frac{1}{p + p_b + \sum_{j=1}^{i-1} p_j} \qquad \text{ce qui équivaut à} \qquad p_a \geq p_b$$

La réciproque étant triviale, on a (1) $\Leftrightarrow \Big((2) \text{ et } p_a \geq p_b\Big)$

On a donc réussi ici à supprimer toutes les variables c_i.

Notons $p^* = \sum_{j=1}^{n} p_j$

$$\text{On a } M_a \textit{ domine } M_b \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} p_a \geq p_b \\ \\ \text{et} \\ \\ \forall p \in \mathbb{R}_+^*, \forall p^* \in \mathbb{R}_+, \quad \dfrac{c_a}{p} + \dfrac{c_b}{p + p_a + p^*} \quad \leq \quad \dfrac{c_b}{p} + \dfrac{c_a}{p + p_b + p^*} \end{cases} \qquad (2)$$

On remarque que si on fait tendre p^* vers $+\infty$, alors on obtient $c_a \leq c_b$

Elimination de p^* :

On veut maintenant trouver une équivalence du système, indépendante de p^*.

Soit $f_p(x) = \dfrac{c_b}{p + p_a + x} - \dfrac{c_a}{p + p_b + x}$ définie pour $x \geq 0$

On a (2) $\Leftrightarrow$ $\forall p \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_p(x) \leq \dfrac{c_b - c_a}{p}$

ie $\forall p \in \mathbb{R}_+^*, \quad \max\limits_{x \geq 0}(f_p) \leq \dfrac{c_b - c_a}{p}$ (3)

$$\text{On a } M_a \textit{ domine } M_b \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} p_a \geq p_b \\ c_a \leq c_b \\ \forall p \in \mathbb{R}_+^*, \quad \max\limits_{x \geq 0}(f_p) \leq \dfrac{c_b - c_a}{p} \end{cases} \qquad (3)$$

Soit $p \in \mathbb{R}_+^*$. On note $a_p = p + p_a$ et $b_p = p + p_b$. On a $a_p \geq b_p$.

On a $f_p(x) = \dfrac{c_b}{a_p + x} - \dfrac{c_a}{b_p + x}$

D'où $f_p(0) = \dfrac{c_b}{a_p} - \dfrac{c_a}{b_p}$

Et $\lim\limits_{+\infty} f_p = 0$

On a $f_p'(x)$ du signe de $-(c_b - c_a)x^2 - 2(b_p c_b - a_p c_a)x + a_p^2 c_a - b_p^2 c_b$

$\Delta = 4(a_p - b_p)^2 c_a c_b \quad \geq 0$

Donc $f_p'(x)$ s'annule pour les valeurs r_{1p} et r_{2p}, où $r_{1p} \leq r_{2p}$

Comme $c_a \leq c_b$, f_p décroît entre $-\infty$ et r_{1p}, croît entre r_{1p} et r_{2p}, puis décroît entre r_{2p} et $+\infty$

On a $r_{1p} = \dfrac{a_p c_a - b_p c_b - (a_p - b_p)\sqrt{c_a c_b}}{c_b - c_a}$ et $r_{2p} = \dfrac{a_p c_a - b_p c_b + (a_p - b_p)\sqrt{c_a c_b}}{c_b - c_a}$ car $a_p \geq b_p$

Les pôles de f_p sont $-a_p$ et $-b_p$. Montrons que $-a_p \leq r_{1p} \leq -b_p \leq r_{2p}$

$-a_p \leq r_{1p} \Leftrightarrow \sqrt{c_a c_b} \leq c_b$ vrai car $c_a \leq c_b$

$r_{1p} \leq -b_p \Leftrightarrow c_a \leq \sqrt{c_a c_b}$ vrai de même

$-b_p \leq r_{2p} \Leftrightarrow c_a + \sqrt{c_a c_b} \geq 0$ vrai

On a donc les variations de f_p :

– f_p décroît de 0 à $-\infty$ sur $]-\infty\,;-a_p[$

– f_p décroît de $+\infty$ à $f(r_{1p})$ sur $]-a_p\,;r_1]$

– f_p croît de $f(r_{1p})$ à $+\infty$ sur $[r_{1p}\,;-b_p[$

– f_p croît de $-\infty$ à $f(r_{2p})$ sur $]-b_p\,;r_{2p}]$

– f_p décroît de $f(r_{2p})$ à 0 sur $[r_{2p}\,;+\infty[$

On cherche $\max\limits_{x\geq 0}(f_p)$, on ne s'intéresse donc qu'aux x positifs.

Il convient de distinguer 2 cas : $r_{2p} \leq 0$ et $r_{2p} \geq 0$

Si $r_{2p} \leq 0$, alors $\max\limits_{x\geq 0}(f_p) = f_p(0)$

Si $r_{2p} \geq 0$, alors $\max\limits_{x\geq 0}(f_p) = f_p(r_{2p})$

On a donc le système suivant :

$$M_a \ domine \ M_b \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} p_a \geq p_b \\ c_a \leq c_b \\ \\ \forall p \in \mathbb{R}_+^*, \left\{ \begin{array}{ll} r_{2p} \leq 0 \quad \text{et} \quad f_p(0) \leq \dfrac{c_b - c_a}{p} & \quad (3a) \\ \text{ou} & \\ r_{2p} \geq 0 \quad \text{et} \quad f_p(r_{2p}) \leq \dfrac{c_b - c_a}{p} & \quad (3b) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Elimination de p :

– Dans le cas $r_{2p} \leq 0$:

$f_p(0) = \dfrac{c_b}{p + p_a} - \dfrac{c_a}{p + p_b}$

Donc $\quad f_p(0) \leq \dfrac{c_b - c_a}{p} \quad$ équivaut à $\quad (c_b p_a - c_a p_b)p + (c_b - c_a)p_a p_b \geq 0$

Or $\quad c_b p_a - c_a p_b \geq 0 \quad$ car $\quad p_a \geq p_b \quad$ et $\quad c_a \leq c_b$

Donc $\forall p \in \mathbb{R}_+^*, (3a)$ est vraie.

– Dans le cas $r_{2p} \geq 0$:

$r_{2p} = \dfrac{a_p c_a - b_p c_b + (a_p - b_p)\sqrt{c_a c_b}}{c_b - c_a} \qquad$ et $\qquad f_p(x) = \dfrac{c_b}{a_p + x} - \dfrac{c_a}{b_p + x}$

Donc on trouve $f_p(r_{2p}) = \dfrac{(c_b - c_a)^2\sqrt{c_a c_b}}{(p_a - p_b)(c_a + \sqrt{c_a c_b})(c_b + \sqrt{c_a c_b})} \qquad$ indépendant de p

Donc $\quad f_p(r_{2p}) \leq \dfrac{c_b - c_a}{p} \quad \Leftrightarrow \quad p \leq \dfrac{(p_a - p_b)(c_a + \sqrt{c_a c_b})(c_b + \sqrt{c_a c_b})}{(c_b - c_a)\sqrt{c_a c_b}} = p_1$

Or $\quad r_{2p} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad p \leq \dfrac{p_a c_a - p_b c_b + (p_a - p_b)\sqrt{c_a c_b}}{c_b - c_a} = p_2$

Montrons que $p_2 \leq p_1$:

$p_2 \leq p_1 \quad \Leftrightarrow \quad p_a c_a - p_b c_b + (p_a - p_b)\sqrt{c_a c_b} \leq \dfrac{(p_a - p_b)(c_a + \sqrt{c_a c_b})(c_b + \sqrt{c_a c_b})}{\sqrt{c_a c_b}}$

$\Leftrightarrow \quad (p_a - p_b) c_a c_b \geq 0 \quad$ vrai

$$\text{Donc } \forall p \in \mathbb{R}_+^*, \begin{cases} r_{2p} \leq 0 \quad \text{et} \quad f_p(0) \leq \dfrac{c_b - c_a}{p} \\ \text{ou} \\ r_{2p} \geq 0 \quad \text{et} \quad f_p(r_{2p}) \leq \dfrac{c_b - c_a}{p} \end{cases} \qquad \text{est toujours vrai}$$

On a donc $\quad M_a$ *domine* $M_b \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} p_a \geq p_b \\ c_a \leq c_b \end{cases}$