Aussagenlogik

Es gilt für die linke Seite

X	Y	Z	$Y \Rightarrow Z$	$X \Rightarrow (Y \Rightarrow Z)$
True	True	True	True	True
True	True	False	False	False
True	False	True	True	True
True	False	False	True	True
False	True	True	True	True
False	True	False	False	True
False	False	True	True	True
False	False	False	True	True

Es gilt für die rechte Seite

X	Y	Z	$X \wedge Y$	$(X \wedge Y) \Rightarrow Z$
True	True	True	True	True
True	True	False	True	False
True	False	True	False	True
True	False	False	False	True
False	True	True	False	True
False	True	False	False	True
False	False	True	False	True
False	False	False	False	True

Insgesamt also

$X \Rightarrow (Y \Rightarrow Z)$	$(X \wedge Y) \Rightarrow Z$	$X \Rightarrow (Y \Rightarrow Z) \Leftrightarrow (X \wedge Y) \Rightarrow Z$
True	True	True
False	False	True
True	True	True
True	True	True
True	True	True
True	True	True
True	True	True
True	True	True

Da alle Aussagen wahr sind, handelt es sich um eine Tautologie.

Es gibt 6 Punkte auf das Aufstellen der Wahrheitstabelle. Zwei Punkte für die LHS der Aussage, zwei für die RHS und 2 für's "$\Leftrightarrow$". Zwei Punkte gibt es wenn die Leute richtig begründen können warum es eine Tautologie ist.

Teilbarkeitsregeln

Hat die Zahl n $(k+1)$ Ziffern, so gilt

$$n = \sum_{i=0}^{k} n_i 10^i$$

mit $n_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ für alle i. Da $10 = -1 \mod 11$ ist, folgt

$$n = \sum_{i=0}^{k} n_i (-1)^i \mod 11$$

Also auch $n = n_0 - n_1 + n_2 + \ldots \mod 11$. Somit ist der Rest, welcher bei der Division entsteht gleich dem Rest welcher bei der Division der alternierenden Quersumme entsteht. Ist dieser 0, so ist n durch 11 teilbar.

3 Punkte für die Zerlegung in der 10er Basis. 2 Punkte für $10 = -1 \mod 11$. 2 Punkte für die Alternierende Summe. 2 Punkte für die Begründung warum die Teilbarkeit des einen, die des anderen mit sich zieht.

Gruppen

1

Die Operation $\oplus$ ist offensichtlich abgeschlossen in $\mathbb{R}^3$. Die Assoziativität folgt aus

(x_1, x_2, x_3) (y_1, y_2, y_3) (z_1, z_2, z_3)

$$
\begin{aligned}
(x \oplus y) \oplus z = (&x_1 + y_1 + z_1, x_2 + y_2 + z_2,\\
&x_3 - x_2y_1 + x_1y_2 + y_3 - x_2z_1 - y_2z_1 + x_1z_2 + y_1z_2 + z_3)\\
x \oplus (y \oplus z) = (&x_1 + y_1 + z_1, x_2 + y_2 + z_2,\\
&x_3 - x_2y_1 + x_1y_2 + y_3 - x_2z_1 - y_2z_1 + x_1z_2 + y_1z_2 + z_3)
\end{aligned}
$$ 2

1 1

Das Neutrale Element ist $(0, 0, 0)$ und das Inverse zu (x_1, x_2, x_3) ist $(-x_1, -x_2, -x_3)$, wie man durch simples nachrechnen feststellen kann. Einfaches ausmultiplizieren zeigt ausserdem:

$$u \oplus x - x \oplus u = (0, 0, -2u_2x_1 + 2u_1x_2)$$

Da der letze Teil für alle x_1 und x_2 gleich 0 sein muss, muss er insbesonder für $x_1 = -u_2$ und $x_2 = u_1$ gleich 0 sein. Dies geht aber nur wenn $u_1 = u_2 = 0$ (da $u_2^2 + u_1^2 \geqslant 0$) ist. Also ist $Z = \{u \in \mathbb{R}^3 : u_1 = 0,\ u_2 = 0,\ u_3 \in \mathbb{R}\}$. 2 Eine Gruppe ist genau dann kommutativ, wenn sie mit ihrem Zentrum übereinstimmt. 1 + 1

1 Punkt auf Abgeschlossenheit, 2 Punkte auf die Assoziativität, 1 Punkt aufs neutrale Element, 1 Punkt aufs inverse Element. 2 Punkte auf die Berechnung des Zentrums. 1 Punkt für jede Richtung in der äquivalenz zwischen Zentrum und Kommutativität.

Komplexe Zahlen

Da $z = (a + \imath b)$ gilt, folgt $z^3 = (a^3 + 3ab^2) + \imath(3a^2b - b^3)$. Nun vergleicht man Real- und Imaginärteil und erhält das System

$$\begin{aligned} a^3 + 3ab^2 &= 8 \\ 3a^2b - b^3 &= 0 \end{aligned}$$

Aus der 2. Gleichung folgt $b = 0$ oder $b^2 = 3a^2$. Setzt man $b = 0$ in die erste Gleichung ein, erhält man $a^3 = 8$. Also $a = \sqrt[3]{8} = 2$. Setzt man $b^2 = 3a^2$ ein, erhält man $a^3 = -1$. Also $a = -1$. Das heißt, $b = \pm\sqrt{3}$. Somit lauten die 3 Lösungen $z = 2$, $z = -1 + \imath\sqrt{3}$ und $z = -1 - \imath\sqrt{3}$.

Alternativ, kann man auch sehen, dass 2 eine Wurzel ist und dann Polynomdivision durchführen. Es gilt

$$z^3 - 8 = (z - 2)(z^2 + 2z + 4)$$

Die Nullstellen des quadratischen Polynoms sind nun

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{-2 - \sqrt{-12}}{2} = -1 - \imath\sqrt{3} \\ z_2 &= \frac{-2 + \sqrt{-12}}{2} = -1 + \imath\sqrt{3} \end{aligned}$$

Es gibt 2 Punkte auf die reelle Nullstelle und 3 auf die komplexwertigen.

Zahlenfolgen

1. Falsch. Betrachte $(1 - \frac{1}{n})_n$. Der Limes ist 1 und alle Glieder sind strikt kleiner 1.
2. Richtig. Das ist die kontraposition der Definition von konvergenz.
3. Richtig. Cauchyfolgen in $\mathbb{R}$ sind immer konvergent.

Reihen- und Potenzreihenkonvergenz

1. Es gilt.

   a) Quotientenkriterium.

   $$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(k+1)^4 8^{k+1}}{k^4 8^k} = (\frac{k+1}{k})^4 8 \geqslant 8 > 1$$

   Somit ist die Reihe divergent.

   b) Quotientenkriterium

   $$\frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{\frac{(k+1)!}{2^{(k+1)^2}}}{\frac{k!}{2^{k^2}}} = \frac{k+1}{2^{2k+1}}$$

   Nun kann man sagen, dass der letze Term gegen 0 geht, da die Exponentialfunktion schneller wächst als Polynome.
   Alternativ, mit der Formel von Bernouilli gilt $2^n = (1+1)^n \geqslant 1+n$ und es folgt

   $$\frac{b_{k+1}}{b_k} \leqslant \frac{2^k}{2^{2k+1}} = 2^{-k-1} \leqslant \frac{1}{4} < 1$$

   Also ist die Reihe Konvergent.

2. Analog zum 1. Punkt.

   a) Mit Hadamard: $\sqrt[k]{k^4 8^k} = 8(\sqrt[k]{k})^4 \to 8$. Also ist $R = \frac{1}{8}$.

   b) Man behandelt die Potenzreihe wie eine gewöhnliche Reihe. Dann folgt, wie oben, aus dem Quotientenkriterium:

   $$\frac{k+1}{2^{2k+1}} x \to 0$$

   für $k \to \infty$, unabhängig vom Wert $x \neq 0$. Ist $x = 0$ konvergiert die Reihe trivialerweise. Somit konvergiert sie für alle x und der Konvergenzradius ist unendlich.

Stetigkeit

1. Falsch. Man beachte $\geqslant$ und $>$.
2. Richtig. Stetige Funktionen nehmen auf kompakten Intervallen ihre Extrema an.
3. Falsch. Sei $(n)_n$ und $f(x) = \frac{1}{x}$.
4. Richtig. Siehe $f(x) = \sqrt{x}$ oder $f(x) = x$. Gleichmäßig stetig: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, x_0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Grenzwerte

1. Durch Rausziehen der größten Potenzen folgt:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{125x^9 - 9x^5}{(25x+1)(5x^4+1)^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{125 - 9x^{-4}}{(25x+\frac{1}{x})(5+\frac{1}{x^4})^2} = \frac{125}{25\cdot 5^2} = \frac{1}{5}$$

2. Mittels doppeltem Hospital. (anwendbar da alle Ausdrücke in einer Umgebung $(0,b)$ von 0 mit $b>0$ immer positiv sind und in 0 gleich 0 sind)

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x} - 3x - 1}{e^{-2x} + 2x - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{3e^{3x} - 3}{-2e^{-2x} + 2} = \lim_{x\to 0} \frac{9e^{3x}}{4e^{-2x}} = \frac{9}{4}$$

3. Man nutzt die Definition der Eulerschen Zahl.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \left(\frac{(x^2-4)}{x^2-1}\right)^{x^2} &= \lim_{x\to\infty} \left(1 - \frac{3}{x^2-1}\right)^{x^2} \\
&= \lim_{x\to\infty} \left(1 - \frac{3}{x^2-1}\right)^{x^2-1} \left(1 - \frac{3}{x^2-1}\right) \\
&= \lim_{x\to\infty} \left(1 - \frac{3}{x^2-1}\right)^{x^2-1} \cdot \lim_{x\to\infty} \left(1 - \frac{3}{x^2-1}\right) \\
&= e^{-3} \cdot 1 = e^{-3}
\end{aligned}$$

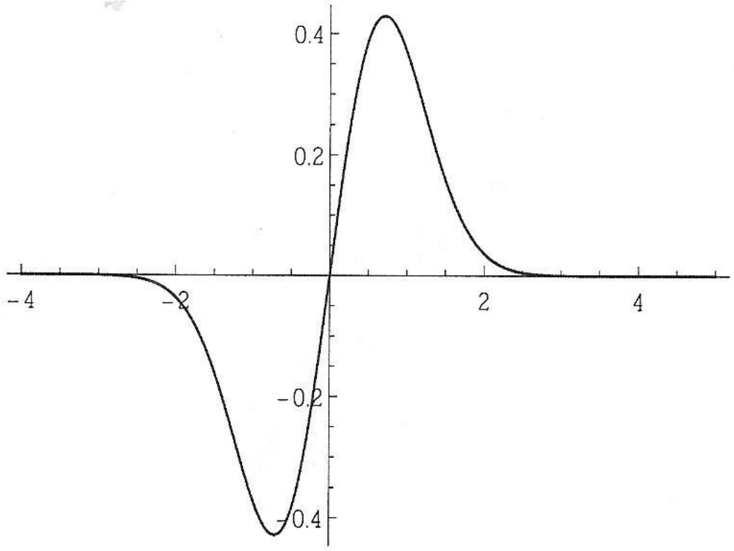
Wichtig ist hier die Relation $\lim_{n\to\infty}(1-\frac{a}{n})^n = e^a$. Diese steht *nicht* im Skript!

Kurvendiskussion

f ist C^∞ auf ganz $\mathbb{R}$ und Punktsymmetrisch.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x\exp(-x^2)\\
f'(x) &= e^{-x^2}\left(1-2x^2\right)\\
f''(x) &= 2e^{-x^2}x\left(2x^2-3\right)
\end{aligned}
$$

Extrema in $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Wendepunkte in $x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ und 0. Für $x < -\sqrt{\frac{3}{2}}$ ist f konkav. Dann bis $x = 0$ konvex. Dann bis $\sqrt{\frac{3}{2}}$ wieder konkav und danach wieder konvex. Limes im unendlichen ist immer 0.



1 Punkt für Differenzierbarkeit auf $\mathbb{R}$. 1 Punkt für Symmetrie. 1 Punkt für 1. Ableitung. 1 Punkt für 2. Ableitung. 1. Punkt für jedes Extrema und jeden Wendepunkt. 2 Punkt für Skizze, 0.5 Punkte für jeden Limes. 2 Punkte für konvex/konkav Verhalten.

Integralrechnung

Zunächst gilt laut Definition

$$U_f(Z_n) = \sum_{i=0}^{n-1} \inf_{\xi\in[x_i,x_{i+1}]} f(\xi)\,(x_{i+1}-x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} \inf_{\xi\in[x_i,x_{i+1}]} (1-\xi^2)\,(x_{i+1}-x_i)$$

und

$$O_f(Z_n) = \sum_{i=0}^{n-1} \sup_{\xi\in[x_i,x_{i+1}]} f(\xi)\,(x_{i+1}-x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} \sup_{\xi\in[x_i,x_{i+1}]} (1-\xi^2)\,(x_{i+1}-x_i)$$

Da $f(x) = (1-x^2)$ auf $[0,1]$ streng monoton fallend ist, erhält man

$$U_f(Z_n) = \sum_{i=0}^{n-1} (1-x_{i+1}^2)\,(x_{i+1}-x_i)$$

und

$$O_f(Z_n) = \sum_{i=0}^{n-1} (1-x_i^2)\,(x_{i+1}-x_i)$$

Durch Einsetzen von $x_i = \frac{i}{n}$ und damit $x_{i+1}-x_i = \frac{i+1}{n} - \frac{i}{n} = \frac{1}{n}$ ergibt sich dann

$$\begin{aligned}
U_f(Z_n) &= \sum_{i=0}^{n-1} \left(\left(1-\left(\frac{i+1}{n}\right)^2\right)\cdot\frac{1}{n}\right) && (1)\\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{1}{n} - \frac{(i+1)^2}{n^3}\right) && (2)\\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n^3}\cdot\sum_{i=0}^{n-1} (i+1)^2 && (3)\\
&= 1 - \frac{1}{n^3}\cdot\sum_{i=0}^{n-1} (i+1)^2 && (4)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
O_f(Z_n) &= \sum_{i=0}^{n-1} \left(\left(1-\left(\frac{i}{n}\right)^2\right)\cdot\frac{1}{n}\right) && (5)\\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{1}{n} - \frac{i^2}{n^3}\right) && (6)\\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n^3}\cdot\sum_{i=0}^{n-1} i^2 && (7)\\
&= 1 - \frac{1}{n^3}\cdot\sum_{i=0}^{n-1} i^2 && (8)
\end{aligned}$$

Nun erinnern wir uns an die Formel für die Summe der ersten n Quadratzahlen,

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$$

und erhalten damit schließlich

$$U_f(Z_n) = 1 - \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6} = 1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{(n+1)}{n} \cdot \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)}{n} = \frac{2}{3} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{6n^2}$$

und

$$O_f(Z_n) = 1 - \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n\,(n-1)\,(2n-1)}{6} = 1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{(n-1)}{n} \cdot \frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)}{n} = \frac{2}{3} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{6n^2}$$

Um das eigentliche Integral zu bestimmen, müssen wir die Zerlegungen nun immer feiner werden lassen. Wir untersuchen die Unter- und Obersummen also auf Konvergenz:

$$\lim_{n\to\infty} U_f(Z_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{3} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{6n^2} = \frac{2}{3}$$
$$\lim_{n\to\infty} O_f(Z_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{3} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{6n^2} = \frac{2}{3}$$

Wir sehen, dass $\lim_{n\to\infty} U_f(Z_n) = \lim_{n\to\infty} O_f(Z_n)$ gilt. Damit ist $f(x)$ über $[0,1]$ Riemann-integrierbar, und wir erhalten insgesamt

$$\int_0^1 \left(1+x^2\right) \mathrm{d}x = \frac{2}{3}\,.$$

Jeweils 4 Punkte fürs korrekte Ausrechnen der Ober- und Untersumme bis (4), bzw. (8). Jeweils 1 Punkt fürs anwenden der Formel. Und jeweils 1 Punkt für den Limes.